ejercicios-segundo-parcial.pdf

user20202

álgebra Conmutativa

2º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Extremadura

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

PEKIS for Foodies

¿RELLENANDO APUNTES? RELLENATE UN TACO.

RELLENOS PARA TACOS PEKIS BRUTALES.

EXAMEN ENERO 2021

Sea $f: A \longrightarrow B$ un morfismo de anillos. Dota a B de estructura de A-módulo.

- $b+b'$.
- $a \cdot b = f(a)b$

- $(B,+)$ grupo abeliano.
  - $-(b+b')+b'' = b+(b'+b'')$
  - $0 \in B$.
  - $b+(-b) = 0$
  - $b+b' = b'+b$.
- $a(b+b') = f(a)(b+b') = f(a)b + f(a)b' = ab+ab'$

...

Resuelve: $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = n$

$(\nabla^2 - 2\nabla + Id)(a_n) = (n)$

$(\nabla - Id)^2(a_n) = (n) \longrightarrow n \in \ker(\Delta^2)$

Entonces: $n \in \ker \Delta^2$:

$a_n \in \langle 1, n, n^2, n^3 \rangle = \langle \binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3} \rangle$

- $a_n = \lambda_0\binom{n}{0} + \lambda_1\binom{n}{1} + \lambda_2\binom{n}{2} + \lambda_3\binom{n}{3}$

$\Delta^2(a_n) = n$

$\Delta^2(\lambda_0\binom{n}{0} + \lambda_1\binom{n}{1} + \lambda_2\binom{n}{2} + \lambda_3\binom{n}{3})$

$\hookrightarrow \lambda_2 = 0$
$\lambda_3 = 1$. $\binom{n}{3}$.

WUOLAH

Scanned with CamScanner

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = n^2$

$(n+2)^2 - 4(n+1) + 4n^2 =$
$= n^2 + 2n + 4 - 4(n^2 + 2n + 2) + 4n^2$
$= n^2 + 4n + 4 - 4n^2 - 8n - 8 + 4n^2$
$= 5n^2 - 8n - 4$

↓

Solución homogénea:

$\ker(\nabla^2 - 4\nabla + 4Id) = \ker(\nabla - 2Id)^2 = 2^n(an + b)$

Solución particular

Busquemos un polinomio

- $(ax+b)(n^2) = a(n+1)^2 + bn^2 = 0 \Rightarrow a(n^2+2n+1) + bn^2 = 0$

$an^2 + 2an + a + bn^2 = 0 \quad an^2 + 2an + a + bn^2$

$an^2 + (2a+b)n + a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$

- $(ax^2+bx+c)(n^2) = a(n+2)^2 + b(n+1)^2 + cn^2 =$

$= a(n^2+4n+4) + b(n^2+2n+1) + cn^2 =$

$= an^2 + 4an + 4a + bn^2 + 2bn + b + cn^2 =$

$= (a+b+c)n^2 + (4a+2b)n + 4a + b = 0$

$4a+b=0 \quad b = -4a = 0$
$a+b+c=0 \quad c = 0$
$4a+2b=0 \longrightarrow 4a + 2(-4a) = 0$
$4a - 8a = 0$
$-4a = 0 \longrightarrow a = 0$

- $(ax^3+bx^2+cx+d)(n^2)$

$a(n+3)^2 + b(n+2)^2 + c(n+1)^2 + dn^2 =$

$= a(n^2+6n+9) + b(n^2+4n+4) + c(n+2n+1) + dn^2 =$

$= (a+b+c+d)n^2 + (6a+4b+2c)n + (9a+4b+c)$

$\begin{cases} 9a+4b+c = 0 \\ 6a+4b+2c = 0 \\ a+b+c+d = 0 \end{cases}$

$-(9a+4b) = c$
$6an + 4bn + (-9a+4b) = 0$
$6a + 4b - 9a + 4b = 0$
$-3a + 4b = 0$

$a = 4$, $b = 3$, $c = -48$, $d = 55$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Scanned with CamScanner

WUOLAH

Nuestro método de enseñanza es propio, avalado por más de 5.000 alumnos ¡Clic aquí!

PARA TI ESTE PORTÁTIL ES GENIAL

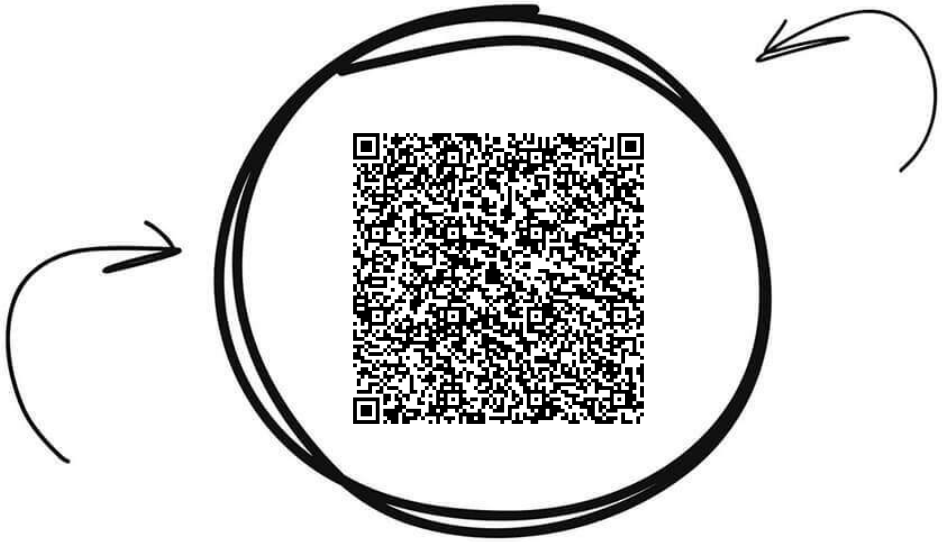
Para tu padre... está en oferta

Pásale este QR
a los Reyes magos...
o a tu padre

GAMING - MSI Stealth 16 Studio

Queridos Reyes Magos, este año he sido excepcionalmente bueno, y tengo en mente un regalo que podría hacer que mis tareas escolares se conviertan en épicas batallas de conocimiento. Me encantaría recibir un portátil ultraligero que, aunque suene a ciencia ficción, esté equipado con todo lo que un amante de los videojuegos como yo podría desear: pantalla UHD+, tarjeta gráfica hasta RTX4070, procesador i9, ¡y un peso menor a 2kg para llevarlo a donde sea! el color no me importa, podéis elegeri en blanco o azul marino.

álgebra Conmutativa



Banco de apuntes de la

WUOLAH

Comparte estos flyers en tu clase y consigue más dinero y recompensas

1. Imprime esta hoja
2. Recorta por la mitad
3. Coloca en un lugar visible para que tus compis puedan escanar y acceder a apuntes
4. Llévate dinero por cada descarga de los documentos descargados a través de tu QR

Sean $S, T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ endomorfismos $\mathbb{R}$-lineales de matrices asociadas: ¿Son equivalentes?

↳ ¿Cuándo?

- $\left|\begin{pmatrix} x-3 & -1 & -1 \\ 2 & x-1 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}\right| = x(x-1)(x-3) - 2 - (-2x) =$

$= (x^2-x)(x-3) - 2 + 2x = x^3 - 3x^2 - x^2 + 3x - 2 + 2x =$

$= x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-2)(x-1)^2$

- $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 2 & x-2 & 0 \\ 4 & -2 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x-2)$

Sea A un anillo euclídeo y M un A-módulo finito generado de torsión. Sea $a \in A$ y $\text{Anul}(M) = (b)$. Prueba que si a, b coprimos, entonces $M \xrightarrow{a\cdot} M$, $m \longmapsto am$ es isomorfismo de A-módulos.

Sabemos $\text{Anul}(M) := \{a \in A : a \cdot m = 0\ \forall\} = b \longrightarrow \underline{b \cdot m = 0}$

Sabemos:

$A/\text{Anul}(\langle m \rangle) \longrightarrow M$

$\downarrow$

M

$\bar{a} \longmapsto a \cdot m$ es isomaf.

$A/bA \longrightarrow M$ isomaf.

$\text{mcd}(a,b) = 1$.

$\ker a\cdot \simeq A/aA$

Si $M \xrightarrow{a\cdot} M$ isom.

$\ker a\cdot : \{m \in M : am = 0\} \longrightarrow m = 0$

Scanned with CamScanner

si lees esto me debes un besito

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

$a_{n+2} + 2a_{n+1} - 6a_n = 1 + 2^n$ (20-6-2022)

① SOLUCIÓN HOMOGÉNEA:

$\ker(\nabla^2 + 2\nabla - 6Id) = \ker(\nabla - (-1+\sqrt{7})Id) \oplus \ker(\nabla - (-1-\sqrt{7})Id) =$

$= a\cdot(-1+\sqrt{7})^n + b(-1-\sqrt{7})^n$

② SOLUCIÓN PARTICULAR

→ Para 2^n : $q(x) = ax+b = x-2$

$(a\nabla + bId)(2^n) = 0 \longrightarrow \boxed{a=1, b=-2}$

Algoritmo de Euclides:

$p(x) = x^2+2x-6$; $q(x) = x-2$

$2 = x^2+2x-6 - (x+4)(x-2)$

$\hookrightarrow 1 = \frac{1}{2}(x^2+2x-6) - \frac{x+4}{2}(x-2)$

$\hookrightarrow \left[\frac{1}{2}(x^2+2x-6) - \frac{x+4}{2}(x-2)\right]2^n = 2^n$

$\hookrightarrow \left[\frac{1}{2}(\nabla^2+2\nabla-6Id) - \frac{(\nabla+4Id)}{2}(\nabla-2Id)\right](2^n) = 2^n$

cuando sust. 2^n.

$\hookrightarrow (\nabla^2+2\nabla-6Id)\underbrace{(1/2\,Id)(2^n)}_{\frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}} = (2^n)$ → solución particular.

→ Para 1

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Scanned with CamScanner

WUOLAH

Nuestro método de enseñanza es propio, avalado por más de 5.000 alumnos ¡Clic aquí!

PEKIS for Foodies
¿RELLENANDO APUNTES? RELLENATE UN TACO.
RELLENOS PARA TACOS PEKIS BRUTALES.

Prueba que si $A^n \cong A^m \longrightarrow n=m$ examen

Sea $\mu \subset A$ un ideal ~~de~~ maximal. Entonces:

$$A^n/\mu A^n = (A \oplus \overset{n}{\dots} \oplus A)/\mu \oplus \overset{n}{\dots} \oplus \mu = A/\mu \oplus \overset{n}{\dots} \oplus A/\mu$$

Obviamente $A^n/\mu A^n \cong A^m/\mu A^m$:

$$\dim A^n/\mu A^n = \dim A^m/\mu A^m \longrightarrow \underline{\underline{n=m}} \quad \square$$

Sean $N_1, N_2 \subseteq M$ dos submódulos y sea $N_2 = \{\overline{n}_2 \in M/N_1 : n_2 \in N_2\}$

Pruébese que $(M/N_1)/\overline{N_2} \cong M/(N_1+N_2)$

$$\pi : M \longrightarrow (M/N_1)/\overline{N_2}$$
$$m \longmapsto \overline{\overline{m}}$$

Como $\ker\pi = \{m \in M : \overline{\overline{m}} = 0\} = \{m \in M : \overline{m} \in \overline{N_2}\} =$

$= \{m \in M : \overline{m} = \overline{n_2}, \underset{n_2 \in N_2}{} \} = \{m \in M : \exists n_2 \in N_2, n_1 \in N_1 \text{ // } m = n_1 + n_2\} =$

$= N_1 + N_2$

Th. Isom.

Scanned with CamScanner

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Sea M un A-módulo, $m_1, m_2, m_3 \in M$ y $a \in A$. Probar

$$\langle m_1, m_2, m_3 \rangle = \langle m_1, m_2 - am_1, m_3 \rangle$$

- $\langle m_1, m_2, m_3 \rangle = \{ a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3, \forall a_1, a_2, a_3 \in A \} := $

$= \boxed{Am_1 + Am_2 + Am_3}$.

- $\langle m_1, m_2 - am_1, m_3 \rangle = \{ a_1 m_1 + a_2(m_2 - am_1) + a_3 m_3, \forall a_1, a_2, a_3 \}$.

$= \{ a_1 m_1 + a_2 m_2 - a_2 a m_1 + a_3 m_3 \} = \{ (a_1 - a_2 a) m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3 \} =$

$= \boxed{Am_1 + Am_2 + Am_3}$ ☑

Da un sistema generado con dos elementos de $\mathbb{Z}$-mod:

$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$: Probemos que $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle (1,0), (0,1) \rangle$

$\subset$ lineal m. ind. : $(0,\bar{0}) = n(1,\bar{0}) + m(0,\bar{1}) = (n, \bar{m}) \to (0,\bar{0})$.

sistema gen: $(n,\bar{m}) = n(1,\bar{0}) + m(0,\bar{1})$

Sea $f: A \to B$ un morfismo de anillos. Dotar a B de estructura de A-módulo. **EXAMEN 2021**

- Def

$$B \times B \xrightarrow{+} B \qquad A \times B \xrightarrow{\cdot} B$$
$$(b, b') \longmapsto b + b' \qquad (a, b) \longmapsto f(a)b$$

- $(B, +)$ grupo abeliano ✓.

- $a(b + b') = f(a)(b + b') = f(a)b + f(a)b' = ab + ab'$.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Scanned with CamScanner

WUOLAH

si lees esto me debes un besito

Dotar a $A[x]$ de estructura de A-módulo.

$A[x]$ es un k-e.v, luego está dotado de una operación suma y producto.

Sean $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, $a_i \in A, i = 0, \dots, n$

$q(x) = a'_n x^n + \dots + a'_0$, $a'_i \in A, i = 0, \dots, n$.

$\oplus$: $p(x) + q(x) = (a_n + a'_n) x^n + \dots + (a_0 + a'_0)$

$\odot$: Sea $\lambda \in A$:

$\lambda p(x) = a_n \lambda x^n + \dots + a_0 \lambda$.

$\longrightarrow$ comprobemos si tiene estructura de A-módulo :

1. $(A[x], +)$ grupo abeliano:

   Asociativa : ✓

   E. neutro : $m(x) = 0$

   E. op : si $p(x) \longrightarrow -p(x) := -a_n x^n - \dots - a_0$.

   Conm : ✓

2. $a(p(x) + q(x)) = a((a_n + a'_n) x^n + \dots + (a_0 + a'_0)) =$

   $= a a_n x^n + a a'_n x^n + \dots + a_0 a + a'_0 a = a p(x) + a q(x)$

3. $(a+b) p(x) = (a+b)(a_n x^n + \dots + a_0) = (a+b) a_n x^n + \dots + (a+b) a_0 =$

   $= a a_n x^n + b a_n x^n + \dots + a a_0 + b a_0 = a p(x) + b q(x)$.

4. $(ab) p(x) = (ab)(a_n x^n + \dots + a_0) = ab\, a_n x^n + \dots + ab\, a_0 =$

   $= a(b a_n x^n + \dots + b a_0) = a(b p(x))$

5. $1 \cdot p(x) = 1(a_n x^n + \dots + a_0) = 1 \cdot \underset{\| \; a_n}{a_n} x^n + \dots + 1 \underset{\| \; a_0}{a_0} = p(x)$.

Scanned with CamScanner

WUOLAH

Nuestro método de enseñanza es propio, avalado por más de 5.000 alumnos ¡Clic aquí!

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

consideremos el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ **examen**

Calcular $\ker 5_\cdot$, $\ker 6_\cdot$ ¿Es $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \cong \ker 5_\cdot \oplus \ker 6_\cdot$?

* $\ker 5_\cdot := \{(\bar{m}, \bar{m}') \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} : 5(\bar{m}, \bar{m}') = 0\}$

$5(\bar{m}, \bar{m}') = 0 \longrightarrow (5\bar{m}, 5\bar{m}') = 0$ $\begin{cases} 5\bar{m} = 0 \text{ en } \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \leftrightarrow \bar{m} = \bar{0} \\ 5\bar{m} = 0 \text{ en } \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \leftrightarrow \bar{m}' = \bar{2} \end{cases}$

$\longrightarrow \ker 5_\cdot := \{(\bar{0}, \underset{\forall r}{\bar{2}r}) \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}\} = 0 \oplus \langle \bar{2} \rangle$

* $\ker 6_\cdot := \{(\bar{m}, \bar{m}') \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} : 6(\bar{m}, \bar{m}') = 0\}$

$6(\bar{m}, \bar{m}') = (6\bar{m}, 6\bar{m}') = 0$ $\begin{cases} 6\bar{m} = 0 \text{ en } \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \Rightarrow \bar{m} = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \\ 6\bar{m}' = 0 \text{ en } \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \rightarrow \bar{m} = \bar{5}. \end{cases}$

$\ker 6_\cdot := \{(\bar{r}, 5\bar{r}) \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \langle \bar{5} \rangle$

¿ $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \cong \ker 5_\cdot \oplus \ker 6_\cdot$?

$\ker 30_\cdot = \{(\bar{m}, \bar{m}') \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} : 30(\bar{m}, \bar{m}') = 0\}$

$30(\bar{m}, \bar{m}') = 0 \longrightarrow (30\bar{m}, 30\bar{m}') = 0$

$30\bar{m}$ en $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \leftrightarrow \bar{m} = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$30\bar{m}'$ en $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \leftrightarrow \bar{m}' = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

$\ker 30_\cdot = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

$\parallel$

$\ker 5_\cdot \oplus \ker 6_\cdot$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Scanned with CamScanner

WUOLAH

si lees esto me debes un besito

PEKIS for Foodies

SUBRAYA ESTO:
CÓMETE UN TACO.

RELLENOS PARA TACOS PEKIS BRUTALES.

$n+2 \quad 2n \quad 2 \quad +1$

$y'' - y = x^3$

Solución homogénea.

$\ker(D^2 - Id) = \ker(D - Id) \oplus \ker(D + Id) \cdot = \bar{e}^x \alpha + e^x \beta$

Solución part.

$(ax^3 + bx^2 + cx + d)' = 3ax^2 + 2bx + c$

$(ax^3 + bx^2 + cx + d)'' = 6ax + 2b$

$6ax + 2b - ax^3 - bx^2 - cx - d =$

$= -ax^3 - bx^2 + (6a - c)x - d + 2b$

$a = -1$

$6a - c = 0 \longrightarrow -x^3 - 6x$

$c = -6$

$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = n$ **examen**

$(\nabla^2 - 2\nabla + Id)(a_n) = (\nabla - Id)^2(a_n) = \Delta^2(a_n)$

$\Delta^2(a_n) = (n) \in \ker \Delta^2$

$(a_n) \in \ker \Delta^4$ ↓ ?

$\left\langle \binom{n}{3}, \binom{n}{2}, \binom{n}{1}, \binom{n}{0} \right\rangle$

$\Delta^2\left(\lambda_3 \binom{n}{3} + \lambda_2 \binom{n}{2} + \lambda_1 \binom{n}{1} + \lambda_0 \binom{n}{0}\right) = n$

$\Delta^2 \binom{n}{3} = \binom{n}{1} = n$?

WUOLAH

Scanned with CamScanner

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Si $A^n \simeq A^m$ entonces $n=m$

Sea $\mu \subset A$ un ideal maximal. Entonces

$$A^n/\mu A^n = (A \overset{n}{\oplus \cdots \oplus} A)/(\mu \overset{n}{\oplus \cdots \oplus} \mu) = A/\mu \overset{n}{\oplus \cdots \oplus} A/\mu$$

Obviamente $A^n/\mu A^n \simeq A^m/\mu A^m$. Por tanto:

$$n = \dim_{A/\mu} A^n/\mu A^n = \dim_{A/\mu} A^m/\mu A^m = m \quad \square$$

Sea $f: A \to B$ un morfismo de anillos. Dotar a B de estructura de A-módulo:

- SUMA: $B \times B \xrightarrow{+} B$, $(b,b') \longmapsto b+b'$ PRO: $A \times B \to B$, $(a,b) \longmapsto f(a)b$

① Grupo abeliano $(B,+)$:

- $b+(b'+b'') \ldots$

· $(B,+)$ es un grupo abeliano por ser $f: A \to B$ morfismo de anillos.

② $a(b+b') = f(a)(b+b') = f(a)b + f(a)b' = ab + ab'$

③ $(a+a')m = (f(a)+f(a'))m = f(a)m + f(a')m = am + a'm$ ($f(a+a')$)

④ $(aa')m = f(aa')m = f(a)f(a')m = f(a)(f(a')m) =$
$= a(a'm)$

⑤ $1 \cdot m = f(1)m = 1m = m$.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Scanned with CamScanner

WUOLAH

Nuestro método de enseñanza es propio, avalado por más de 5.000 alumnos ¡Clic aquí!

$y''' - 2y'' + y = xe^x$

$x^3 - 2x^2 + 1 =$

$(x-1)(x^2 - x - 1) =$

$(x-1)(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2})$

	1	-2	0	1
1		1	-1	-1
	1	-1	-1	0

Solución homogénea:

$\ker(D^3 - 2D^2 + Id) = \ker(D - Id) \oplus \ker(D - \alpha_1 Id) \oplus \ker(D - \alpha_2 Id) =$

$= e^x \lambda + e^{\alpha_1 x} \beta + e^{\alpha_2 x} \alpha.$

Solución particular : $x^m h(x) e^{\lambda x}$: $x\, h(x)\, e^x$

$x(ax+b)e^x$: $(ax^2 + bx)e^x$

1ª der: $(2ax+b)e^x + (ax^2+bx)e^x = (ax^2 + (2a+b)x + b)e^x$

2ª der: $(2ax + 2a + b)e^x + (ax^2 + (2a+b)x + b)e^x =$

$= (ax^2 + (2a + b + 2a)x + (2a + 2b))e^x =$

$= (ax^2 + (4a+b)x + (2a+2b))e^x$

3ª der: $(2ax + 4a + b)e^x + (ax^2 + (4a+b)x + (2a+2b))e^x =$

$= (ax^2 + (6a+b)x + 6a + 3b)e^x$

$\cdot (ax^2 + (6a+b)x + 6a + 3b)e^x - 2(ax^2 + (4a+b)x + (2a+2b))e^x$

$+ (ax^2 + bx)e^x =$

$= ((6a + b + \overset{-8a}{\cancel{4a}} + \overset{-2b}{\cancel{2b}} + b)x + (6a + 3b - 4a - 4b + \cancel{1}))e^x =$

$= (-2ax + 2a - b)e^x$

$\cdot 2a - b = 0 \quad \boxed{b = 1}$

$-2a = 1 \rightarrow \boxed{a = -1/2}$

Sol. part: $x(-\frac{x}{2} + 1)e^x = e^x(x - \frac{x^2}{2})$

Solución total: $e^x(x - \frac{x^2}{2}) + e^x \lambda + e^{\alpha_1 x} \beta + e^{\alpha_2 x} \alpha.$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Scanned with CamScanner

WUOLAH

si lees esto me debes un besito

$$\sum_{i=0}^{n} i^3$$

sabemos que $\sum_{i=0}^{n-1} i^3 = \frac{1}{\Delta}(n^3)$

$(n^3) = a_0\binom{n}{3} + a_2\binom{n}{2} + a_3\binom{n}{1} + a_3 \rightarrow$ si $n=0 \rightarrow$ **$a_0 = 0$** ?

$\Delta(n^3) = (n+1)^3 - n^3) = \Delta\left(a_0\binom{n}{3} + a_1\binom{n}{2} + a_2\binom{n}{1} + a_3\right)$

$= a_0\binom{n}{2} + a_1\binom{n}{1} + a_2$

si **$n=0$**

$(n+1)^3 - n^3 = a_0\binom{0}{2} + a_1\binom{0}{1} + a_2 \rightarrow$ **$a_2 = 1$**

$\Delta((n+1)^3 - n^3) = \Delta\left(a_0\binom{n}{2} + a_1\binom{n}{1}\right) \rightarrow$ **$a_1 = 6$**

Otra vez: $a_0 = 6$

$$n^3 = 6\binom{n}{3} + 6\binom{n}{2} + \binom{n}{1}$$

Calculemos:

$$\frac{1}{\Delta}(n^3) = \frac{1}{\Delta}\left(6\binom{n}{3} + 6\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right) = 6\binom{n}{4} + 6\binom{n}{3} + \binom{n}{2} = \sum_{i=0}^{n-1} i^3$$

como es hasta n1:

$$6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Scanned with CamScanner

WUOLAH

Nuestro método de enseñanza es propio, avalado por más de 5.000 alumnos ¡Clic aquí!

PEKIS for Foodies
SÓLO UN APUNTE MÁS: CÓMETE UN TACO.
RELLENOS PARA TACOS PEKIS BRUTALES.

Prueba que si A^n es A-mód isomorfo a $A^m \longrightarrow n=m$

Sea $\mu \subset A$ un ideal maximal. Tenemos

$$A^n/\mu A^n = \frac{A \oplus \overset{n}{\dots} \oplus A}{\mu \oplus \overset{n}{\dots} \oplus \mu} = A/\mu \oplus \overset{n}{\dots} \oplus A/\mu$$

Obviamente:

$A^n/\mu A^n \cong A^m/\mu A^m$. Entonces:

$$n = \dim_{A/\mu} A^n/\mu A^n = \dim_{A/\mu} A^m/\mu A^m = m. \ \square$$

Sea $f: M \longrightarrow M'$ morfismo. Enunciar th. isomorfía.

Sea $f: M \longrightarrow M'$ un morfismo de anillos. Se cumple que el sg.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ \pi \downarrow & & \uparrow i \\ M/\ker f & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathrm{Im} f \end{array} \quad \text{es conmutativo.}$$

Prueba que A-mod $A[x]$ es un A-módulo libre.

Veamos que $A^{\mathbb{I}} \cong A[x]$

$A^{\mathbb{I}} = \{(a_i)\}$
$(a_i) = (1,0,0\dots)$

$$\begin{array}{ccc} A^{\mathbb{I}} & \xrightarrow{\Phi} & A[x] \\ \{(a_i)\} & \longmapsto & \sum a_i x^i \end{array}$$

$$\ker\Phi := \{(\{a_i\}_{i\in\mathbb{I}}) \in A^{\mathbb{I}} : \Phi(\{a_i\}) = 0\}$$

$$\Phi(\{a_i\}) = \sum a_i x_i = 0 \iff \underline{a_i = 0 \ \forall i}$$

WUOLAH
Scanned with CamScanner
Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

$y''' - 2y'' + y = xe^x$

$x^3 - 2x^2 + 1 =$

$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Solución homogénea:

~~$\ker(D^3 - 2D^2 + Id) = \ker(D - Id) \oplus \ker(D^2 - D - 2Id)$~~

$\ker(D^3 - 2D^2 + Id) = \ker(D - Id) \oplus \ker(D - \alpha_1 Id) \oplus \ker(D - \alpha_2 Id)$

$= e^x \cdot \lambda + e^{\alpha_1 x} \beta + e^{\alpha_2 x} \mu.$

$x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 - x - 1)$

1	1	-2	0	1
		1	-1	0
	1	-1	-1	

Solución particular

$x^m h(x) e^{\lambda x}$

$x(ax+b)e^x = (ax^2 + bx)e^x$

↳ 1ª der: $(ax^2+bx)e^x + e^x(2ax+b) = e^x(ax^2 + (b+2a)x + b)$

↳ 2ª der: $e^x(ax^2 + (b+2a)x + b) + e^x(2ax + b + 2a) =$

$= e^x(ax^2 + (b+2a+2a)x + (2b+2a)) = e^x(ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b)$

↳ 3ª der: $e^x(ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b) + e^x(2ax + 4a + b)$

$= e^x(ax^2 + (6a+b)x + 6a + 3b)$

$\rightarrow e^x(ax^2 + (6a+b)x + 6a + 3b) - 2(e^x(ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b))$

$+ ((ax^2 + bx)e^x) =$

$= e^x((a - 2a + a)x^2 + (6a + b - 8a - 2b + b)x + (6a + 3b - 4a - 4b)$

$= e^x(1 - 2ax + 2a - b) \longrightarrow x(-\frac{1}{2}x)e^x \quad (-\frac{1}{2}x^2 - x)e^x$

$2a = b \quad -2a = 1 \quad 2a - b = 0 \quad a = -1/2 \quad b = 0 \quad -\frac{1}{2}x^2 e^x$

Scanned with CamScanner

si lees esto me debes un besito

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

$y'' - y = x + \operatorname{sen} x$ $\qquad x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

Solución homogénea:

$\ker(D^2 - Id) = \ker(D - \alpha_1 Id) \oplus \ker(D - \alpha_2 Id) =$

$= e^{-x}a + e^{x}b.$

Solución particular

para x:

$h'(x) = a$

$h''(x) = 0$

$(ax+b) = h(x)$

$0 - (ax+b) = x$

$\hookrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \longrightarrow x$

para $\operatorname{sen} x$:

$x^1 (a\operatorname{sen}(x) + b\cos(x)) e^{1x}$

$-b\operatorname{sen}(x) + a\cos(x)$

$\hookrightarrow -b\cos(x) - a\operatorname{sen}(x)$

$-b\cos(x) - a\operatorname{sen}(x) - a\operatorname{sen}(x) - b\cos(x) =$

$= -2b\cos(x) - 2a\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x)$

$-2a = 1 \longrightarrow a = -1/2$

$b = 0$

$\hookrightarrow -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x).$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Scanned with CamScanner

WUOLAH

Nuestro método de enseñanza es propio, avalado por más de 5.000 alumnos ¡Clic aquí!

$f''' - 2f'' + f = xe^x$ $\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

1. Sol. homogénea

$\ker(D^3 - 2D^2 + Id) = \ker(D - Id) \oplus \ker(D - \alpha_1 Id) \oplus \ker(D - \alpha_2 Id) =$

$= e^x \cdot a + e^{\alpha_1} b + e^{\alpha_2} c$

2. Sol. particular : $x^m h(x) e^{\lambda x}$ $\lambda = 1$ $m = 1$ $h(x) = (dx + e)$

$x(dx+e)e^{\lambda x} = (dx^2 + ex)e^{1x}$

$((dx^2+ex)e^{1x})' = (2dx+e)e^x + e^x(dx^2+ex) = e^x(dx^2+ex+2dx+e)$

$((dx^2+ex)e^x)'' = e^x(dx^2 + (e+2d)x + e) + e^x(2dx+e+2d)$

$= e^x(dx^2 + (e+2d)x + e + 2d + e + 2dx) =$

$= e^x(dx^2 + 4dx + ex + 2e + 2d)$

$((dx^2+ex)e^x)''' = e^x(dx^2+4dx+ex+2e+2d) +$

$+ e^x(2dx+4d+e) = e^x(dx^2+4dx+ex+2e+2d+2dx+4d+e)$

$= e^x(dx^2 + 6dx + ex + 3e + 6d)$

$e^x(dx^2 + 6dx + ex + 3e + 6d) - 2e^x(dx^2+4dx+ex+2e+2d) +$

$e^x(dx^2+ex+2dx+e) = xe^x$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Scanned with CamScanner

WUOLAH

si lees esto me debes un besito

PEKIS for Foodies
SÓLO UN APUNTE MÁS: CÓMETE UN TACO.

RELLENOS PARA TACOS PEKIS BRUTALES.

¿Son los grupos abelianos $\mathbb{Z}^3/\langle(3,2,1),(5,6,3)\rangle$ y $\mathbb{Z}^2/\langle(4,2)\rangle$ isomorfos?

examen 18-12-2020

Clasifiquemos ambos grupos y veamos si tienen el mismo rango y los mismos divisores elementales

(1) Clasifiquemos $\mathbb{Z}^3/\langle(3,2,1),(5,6,3)\rangle$

Tenemos $\phi: \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^3$ de matriz en b. estándar $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Entonces $\mathbb{Z}^3/\mathrm{Im}\phi \cong \mathbb{Z}/\langle(3,2,1),(5,6,3)\rangle$

Además, mediante el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^3 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{Z}^3 \\ {\scriptstyle C}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ \mathbb{Z}^3 & \xrightarrow[D]{} & \mathbb{Z}^3 \end{array}$$

obtenemos que $\mathbb{Z}^3/\mathrm{Im}\phi \cong \mathbb{Z}^3/\mathrm{Im}D$

Diagonalizamos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \curvearrowright F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \curvearrowright F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango = 2

WUOLAH
Scanned with CamScanner
Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Calcular los divisores elementales del $\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Z}^3 / \langle (3,4,2), (2,3,2), (2,2,2) \rangle$.
¿Cuántos elementos tiene M?

$$\phi : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \qquad \phi \equiv \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^3 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{Z}^3 \\ {\scriptstyle C}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ \mathbb{Z}^3 & \xrightarrow[D]{} & \mathbb{Z}^3 \end{array}$$

$$M \cong \mathbb{Z}^3 / \mathrm{Im}\phi \overset{\overline{F}}{\cong} \mathbb{Z}^3 / \mathrm{Im}D$$

$$\overline{z} \longmapsto \overline{F(z)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 - C_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 - 2C_1]{C_2 - 2C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M \cong \mathbb{Z}^3 / \mathrm{Im}D \cong \mathbb{Z}/1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

2 el.

Sea G un grupo abeliano finito.
¿A qué es igual el producto de los div. elementales de G?

$$G \cong \bigoplus_{ij} \mathbb{Z}/p_i^{n_{ij}}\mathbb{Z}$$

$$|G| = \left| \bigoplus_{ij} \mathbb{Z}/p_i^{n_{ij}}\mathbb{Z} \right| = \prod_{ij} \left| \mathbb{Z}/p_i^{n_{ij}}\mathbb{Z} \right| = \prod_{ij} p_i^{n_{ij}}$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Scanned with CamScanner

WUOLAH

Nuestro método de enseñanza es propio, avalado por más de 5.000 alumnos ¡Clic aquí!

Diagonalizar: $A = \begin{pmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & x-1 & 0 \\ x-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x-1 & 1-(x-1)^2 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-(x-1)^2 \\ 0 & x-2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-(x-1)^2 \\ 0 & 0 & x(x-2)^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x(x-2)^2 \end{pmatrix}$$

Resuelve el sistema de ecuaciones diofánticas

$$\begin{cases} 2x+3y+z=6 \\ 6x+5y+2z=13 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 13 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 1 & -3 & 0 & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 3 & -2 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 2 & \\ 1 & 3 & 4 & \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x' = 6 \\ y' = -1 \end{cases}$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Scanned with CamScanner

WUOLAH

si lees esto me debes un besito

Calcula los divisores elementales del $\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Z}^3 / \langle (3,4,2),(2,3,2),(2,2,2) \rangle$

¿Cuántos elementos tiene M?

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^3 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{Z}^3 \\ C\uparrow & & \downarrow F \\ \mathbb{Z}^3 & \xrightarrow{D} & \mathbb{Z}^3 \end{array} \qquad \phi \equiv \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M \simeq \mathbb{Z}^3/\mathrm{Im}\,\phi \overset{F}{\simeq} \mathbb{Z}^3/\mathrm{Im}\,D.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} \overset{0}{} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$M \simeq \mathbb{Z}/\cancel{1\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/\cancel{1\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \qquad \underline{2 \text{ elementos}}$$

Calcula una base de Jordan de $T: \mathbb{Q}^4 \longrightarrow \mathbb{Q}^4$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

¿?

$$\begin{pmatrix} x-2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & -2 & 1 \\ -1 & 0 & x & 0 \\ 0 & -1 & 0 & x+2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} -1 \\ \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -2 & & \\ & & \frac{(x-1)^2(x+1)^2}{2} & \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Scanned with CamScanner

WUOLAH

Nuestro método de enseñanza es propio, avalado por más de 5.000 alumnos ¡Clic aquí!

Que no te escriban poemas de amor
cuando terminen la carrera ►►►►►►

WUOLAH

(a nosotros por suerte nos pasa)

$y'' + 4y' + 5y = e^x \cos(x)$ $\quad \alpha_1 = -2+i$ $\quad \alpha_2 = -2-i$

Solución homogenea: $\ker(D^2 + 4D + 5Id) = \ker(D - \alpha_1 Id) \oplus \ker(D - \alpha_2 Id)$

$= e^{\alpha_1 x}(a) + e^{\alpha_2 x} b$.

Solución particular: $x^m (h(x)) e^{\lambda x = x}$

$x^0 (a\cos(x) + b\sen(x)) e^x =$

• 1ª der: $(a\cos(x) + b\sen(x))e^x + (-a\sen(x) + b\cos(x))e^x =$

$= ((a+b)\cos(x) + (b-a)\sen(x))e^x$

• 2ª der: $(-(a+b)\sen(x) + (b-a)\cos(x))e^x + ((a+b)\cos(x) + (b-a)\sen(x))e^x =$

$= e^x((-a-b+b-a)\sen(x) + 2b\cos(x))$

$e^x(-2a\sen(x) + 2b\cos(x)) + 4((a+b)\cos(x) + (b-a)\sen(x))e^x$

$+ 5(a\cos(x) + b\sen(x))e^x =$

$= e^x((-2a+4b-2a+b)\sen(x) + (2b+4a+4b+a)\cos(x))$

$= e^x((-6a+5b)\sen(x) + (6b+9a)\cos(x))$

$6b + 9a = 1$

$-6a + 5b = 0$

$\left[\frac{3}{39}\cos(x) + \frac{2}{39}\sen(x)\right]e^x$

No si antes decirte
Lo mucho que te voy a recordar

Pero me voy a graduar.
Mañana mi diploma y título he de pagar

Llegó mi momento de despedirte
Tras años en los que has estado mi lado.

Siempres me has ayudado
Cuando por exámenes me he agobiado

Oh Wuolah wuolitah
Tu que eres tan bonita

WUOLAH

Scanned with CamScanner

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

SUMATORIOS

$\sum_{i=0}^{n} 2^i$

$(2^n) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i + cte$

$\frac{1}{\nabla - Id}(2^n) = \overbrace{\left(\frac{1}{1} + h(\nabla)(\nabla - 2Id)\right)}^{\text{TAYLOR}}(2^n)$

$\Leftrightarrow (\nabla - 2Id)(2^n) = 0$

$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} + cte$

Calcula $\sum_{i=0}^{n} i2^i$

Sabemos que $\sum_{i=0}^{n-1} i2^i = \frac{1}{\Delta_2}(n2^n) + cte$

$\Delta_2 = \frac{1}{\nabla - Id}(n2^n) + cte$

Taylor de $\frac{1}{x-1}$ en $x=2$: $1 - (x-2) + h(x)(x-2)^2$

$\frac{1}{\nabla - Id}(n2^n) + (cte) = (Id - (\nabla - 2Id))(2^n n) + (cte) =$

$= (n2^n - \underbrace{(n+1)2^{n+1} - 2^{n+1} \ldots}_{\text{desarrollo}}) = (n2^n - n2^{n+1} + cte) = (n-2)2^n + cte$

$\sum_{i=0}^{n} i2^i = (n+1-2)2^{n+1} + cte = (n-1)2^{n+1} + cte = i$

$0 = (0-1)2^1 + \underline{cte} \hookrightarrow (2)$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Scanned with CamScanner

si lees esto me debes un besito

Sea A un anillo euclídeo. M un A-módulo finito generado de torsión. Sea $a \in A$ y $Anul(M) = b$. Prueba que si a, b son coprimos,

Probar $a\cdot: M \longrightarrow M$ isomorfismo de A-módulos.

$m \longmapsto am$

- $M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$; $\forall m \in M, \exists a_1, \dots, a_n \in A : m = a_1 m_1 + \dots + a_n m_n$

$m = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i$. Si $m \neq 0$, al menos un a_i son coprimos con b.

- $Anul_A(M) := \{ bm = 0 \ \forall m \in M \}$

- $a(m) = a \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i m_i = \sum_{i=1}^{n} a a_i m_i = \sum_{i=1}^{n} a_i (a m_i)$

Si a no es coprimo con b $\Rightarrow$ $am_i = 0 \ \forall m_i$, luego $a(m) = 0$ y por tanto, la aplicación no sería inyectiva.

Como estamos en d.i.p: $\lambda a + \delta b = 1$; $a\cdot := \frac{1}{\lambda}(1 - \delta b)$

$$am := \sum a_i \left[\frac{1}{\lambda}(1-\delta b)\right] m_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \left[\frac{1}{\lambda}\right] m_i$$

↓ El universo.

Sea M un A-módulo y $M^* := Hom_A(M, A)$, dota a M^* de estruct. de A-mód.

$M^* : f \in M^* : f : M \longrightarrow A$

$f(am) = a f(m)$

- $\oplus$ $f_1, f_2 \in M^*$ $\begin{cases} f_1 : M \longrightarrow A \\ \quad m \longmapsto f_1(m) \\ f_2 : M \longrightarrow A \\ \quad m \longmapsto f_2(m) \end{cases}$ $f_1 + f_2 : M \longrightarrow A$, $m \longmapsto (f_1 + f_2)(m) := f_1(m) + f_2(m)$

- $\odot$ $\forall f \in M^* \ \forall a \in A$: $f : M \longrightarrow A$, $m \longmapsto f(m)$; $af : M \longrightarrow A$, $m \longmapsto af(m) := a \cdot f(m)$

$0 \cdot m = 0$

$0m = 0m$

$(0+0)m = 0m$

$0m + 0m = 0m$ $\quad 0m = 0$

Scanned with CamScanner

WUOLAH

Nuestro método de enseñanza es propio, avalado por más de 5.000 alumnos ¡Clic aquí!

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Sea A un anillo y $a, b \in A$: $(a,b) = A$. Prueba ...

Sea A un anillo euclídeo y M un A-módulo finito generado.
Prueba que $M \simeq A^n \oplus (\oplus A/p_i^{n_i})$ para ciertos $n \in \mathbb{N}, n_i > 0$
y p_i eltos irreducibles de A.

$$M = \underset{\substack{\downarrow \\ A^n}}{T(M)} \oplus \underset{\substack{\downarrow \\ \oplus A/p_i^{n_i}}}{M/T(M)}$$

① • $T(M) \simeq \bigoplus_i (\bigoplus_{n_i} A/p_i^{n_i}A)$

② • $(M/T(M)) \simeq A^n$

② . $M/T(M) \simeq$ Suplem.$(T(M))$

Sea $n =$ rango$(M/T(M))$

$\forall [m] \in M/T(M) \rightarrow [m] = a_1[m_1] + \dots = \sum_{i=1}^{n} a_i [m_i]$

$\forall m \in$ Supl. $m = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i \simeq A^n$

Sabemos que todo subm. N de un módulo finito generado, factoriza como $N = \bigoplus_i (\bigoplus_{n_i} A/p_i^{n_i}A)$

$T(M) \simeq$

$T(M) = \{m \in M : \exists a \in A \rightarrow am = 0\}$
submodulo?

$\hookrightarrow$ $m_1, m_2 \in T(M)$

$\exists a_1 \in A : a_1 m_1 = 0$
$\exists a_2 \in A : a_2 m_2 = 0$ $\Big\}$ $m_2 + m_1 \underline{\underline{(a_1 a_2)}} = a_1 a_2 m_1 + a_1 a_2 m_2 = 0$.

$\hookrightarrow$ Si $m \in T(M)$.
$\exists a \in A : am = 0$ | $\forall b \in A$ $[bm] = 0$

$a[bm]$

$b[am] = 0$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Scanned with CamScanner

WUOLAH

si lees esto me debes un besito

PEKIS for Foodies
¿RELLENANDO APUNTES? RELLENATE UN TACO.
RELLENOS PARA TACOS PEKIS BRUTALES.

Sea A un anillo y $a,b \in A$: $(a,b)=A$. Prueba que

$b: A/aA \longrightarrow A/aA$ es isomorfismo.

$\bar{c} \longmapsto \overline{bc}$

$\bar{c} = \overline{\delta b} \longrightarrow \overline{b \cdot \overline{\delta b}} = \overline{\delta}$

$1 = cb + qd$

$\hookrightarrow 1 = cb$ c. es el inverso de b.

Sea $I \subseteq A$ un ideal y M un A-módulo. Denotemos IM como el mínimo submódulo que contiene a $\{i.m\}_{i \in I}$.

Prueba que $IM = \{i_1m_1 + \dots + i_nm_n : n \in \mathbb{N}, i,j \in I, m_j \in M\}$

IM: como para IM, podemos tomar cualquier $m \in M$, necesitamos un sistema $\langle m_1, \dots, m_n \rangle$ que genere M.

Dado que en IM no podemos tomar todos los elementos de A para realizar combinaciones $\longrightarrow IM \subset M$

$\subset IM$ submódulo? $\begin{cases} m_1, m_2 \in IM \Rightarrow m_1 + m_2 \in IM \\ m \in I, \forall a \in A \Rightarrow am \in IM \end{cases}$

- $m \in IM \quad m = i_1m_1 + \dots + i_nm_n$
  $m' \in IM \quad m' = i_1'm_1 + \dots + i_n'm_n$
  $m + m' = (i_1 + i_1')m_1 + \dots + (i_n + i_n')m_n$

IM:

Si tomamos un m cualquiera de M: $m = a_1m_1 + \dots + a_nm_n$.

Entonces $\forall i \in I \longrightarrow im \in M$

$$i \sum_{j=1}^{n} a_jm_j = \sum i a_j \cdot m_j$$

Dado que $i \in I \longrightarrow ia_j \in I \; \forall a_j \in A$, luego $im \in IM$

$\forall i \in I, \forall m \in M \longrightarrow \{im\} \in IM$ //

Si tomamos un submódulo de IM:

① Si no pod. tomar como coef todo $i \in I$ dump $\neq$

WUOLAH
Scanned with CamScanner
Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Define morfismo de A-módulos. Define cociente por un submódulo y dótalo de estr. de A-módulo.

• Sea $f: M \longrightarrow N$ una aplicación entre dos A-mód M, N. se dice que f es morfismo si:

$$f(m+m') = f(m) + f(m')$$
$$f(am) = af(m)$$

• Por otro lado, sea $N \subseteq M$ un submódulo del A-mód M.

$M/N := \{\bar{m}$ (donde $\bar{m} := m+N$), $\forall m \in M$

$$\frac{M}{N} \times \frac{M}{N} \longrightarrow M/N$$
$$(\bar{m}, \bar{m}') \longmapsto \overline{m+m'}$$

Dado un endomorfismo K-lineal $T: E \to E$. Dota a E de est. $K[x]$ mod.

Dado un e.v. E y un endomorfismo $T: E \longrightarrow E$, definimos $xe = T(e)$ $\forall e \in E$ y $\forall p \in K[x]$: $p(x) \cdot e = p(T)(e)$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Scanned with CamScanner

WUOLAH

Nuestro método de enseñanza es propio, avalado por más de 5.000 alumnos ¡Clic aquí!

Sea $p(x) \in K[x]$ un polinomio mónico. Calcular el polinomio característico del endomorfismo k-lineal $f: \underset{(p(x))}{K[x]} \longrightarrow \underset{(p(x))}{K[x]}$

$p(x)$: polinomio mónico de grado n.

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

$$\mathcal{B} = \{[1], [x], \dots, [x^{n-1}]\}$$

$$f[1] = [x1] = [x] = 0[1] + 1[x] + 0 \dots + 0[x^{n-1}]$$

$$f[x] = [x^2] = 0[1] + 0[x] + 1[x^2] + \dots + 0[x^{n-1}]$$

$$f[x]^2 = [x^3] = \dots$$

$$f[x^{n-1}] = [x^n]$$

$$[p(x)] = [0]$$

$$[x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n] = [0]$$

$$[x^n] = -a_1[x^{n-1}] - \dots - a_n[1]$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

$$G(x) = |x\,Id - A| = \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & a_n \\ -1 & x & & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & x & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x + a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1} a_n (-1)^{n-1} + (-1)^{n+2} (a_{n-1}) x (-1)^{n-2} + \dots + a_1^{n-1} + x^n$$

$$(-1)^{n+1} a_n (-1)^{n-1} = a_n$$

$$(-1)^{n+2} (a_{n-1}) x (-1)^{n-2} = a_{n-1} \cdot x$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Scanned with CamScanner

WUOLAH

si lees esto me debes un besito